SLOŽENI KAMATNI RAČUN
(Složeni interesni račun)

(Dekurzivno računanje kamate)

FAKTOR AKUMULACIJE

Osnovna relacija između početnog kapitala K i uvećanog kapitala (krajnjeg kapitala) posle n obračunskih perioda K_n je:

$$K_n = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \;; \qquad K_n = K \cdot I_{p\%}^n \;;$$

p je dekurzivna relativna kamatna stopa,

$r = 1+\frac{p}{100}$ je dekurzivni kamatni činilac,

$I_{p\%}^n$ - vrednost faktora akumulacije r^n koji se nalazi u tablicama složenih kamata za datu kamatnu stopu i dati broj obračunskih perioda.

Ako vreme ukamaćivanja $t = n+s$ nije ceo broj obračunskih perioda onda se uvećani kapital izračunava:

a) Racionalnim metodom:

$$K_n = K \cdot r^t$$

b) Komercijalnim metodom:

$$K_n = K \cdot I_{p\%}^n\left(1+\frac{ps}{100}\right)$$

Znači da se za vreme n računa složena kamata, a za vreme s prosta kamata (mešovito kapitalisanje). Ako je preostalo vreme s od celog broja obračunskih perioda dato u mesecima onda sledi da je:

$$K_n = K \cdot I_{p\%}^n\left(1+\frac{pm}{1200}\right)$$

gde je m-broj preostalih meseci. Ako je preostalo vreme izraženo u danima onda je:

$$K_n = K \cdot I_{p\%}^n\left(1+\frac{pd}{36000}\right)$$

KONFORMNA KAMATNA STOPA dobija iz relacije:

$$p_k = 100\left(\sqrt[m]{1+\frac{p}{100}}-1\right)$$

gde je p-kamatna stopa za obračunski period u odnosu na koji se traži konformna stopa. m-je broj kapitalisanja u toku obračunskog perioda u odnosu na koji se traži konformna stopa.

Pri neprekidnom kapitalisanju uvećani kapital je:

$$K_n = K \cdot e^{\frac{np}{100}}$$

Primer:

Na koliki iznos naraste kapital od 10.000 din. ako je uložen na 10 godina sa kamatnom stopom 8%(pa)d i kapitalisanje: a) godišnje b) polugodišnje c) kvartalno.

Rešenje:

a) $K_n = K \cdot r^n \Rightarrow K_n = 10.000\left(1+\frac{8}{100}\right)^{10} = 10.000 \cdot 2{,}1589250 = 21589{,}25$

Prema tome K_n = 21589,25 din.

Ako bi koristili kamatne tablice dobili bi:

$$K_n = K \cdot I_{p\%}^{n} = K \cdot I_{8\%}^{10} = 10.000 \cdot 2{,}1589250 = 21589{,}25$$

b)

$$K_n = K \cdot r^{20} = 10.000\left(1+\frac{4}{100}\right)^{20} = 10.000 \cdot 1{,}04^{20} = 21911{,}23$$

$$K_n = K \cdot I_{4\%}^{20} = 10.000 \cdot 2{,}1911231 = 21911{,}23$$

c)

$$K_n = K \cdot r^{40} = 10.000\left(1+\frac{2}{100}\right)^{40} = 10.000 \cdot 1{,}02^{40} = 22080{,}40$$

$$K_n = K \cdot I_{2\%}^{40} = 10.000 \cdot 2{,}2080397 = 22080{,}40$$

Primer:

Uloženo je u banku 20.000 din a posle 4 godine još 30.000 din. Kojom se sumom raspolaže posle 10 godina ako je kamatna stopa 8%(pa)d a kapitalisanje godišnje.

Rešenje:

$$K_n = K_1 \cdot I_{8\%}^{10} + K_2 I_{8\%}^{6} = 20.000 \cdot 2{,}158925 + 30.000 \cdot 1{,}586874 = 90784{,}72$$

Može se zadatak uraditi i na drugi način. Izračunajmo prvo uvećanu vrednost kapitala K_1 posle 4 godine, dakle u trnutku kada dodajemo kapital K_2, pa sada tako formirani novi kapital je početni kapital za sledeći period od 6 godina:

$$K_n = (K_1 \cdot I_{8\%}^4 + K_2)\, I_{8\%}^6 = (20.000 \cdot I_{8\%}^4 + 30.000) \cdot I_{8\%}^6 = 90784{,}72$$

Primer:

Kapital od 5.000 din. uložen je u banku za vreme od 7 godina i 8 meseci uz kamatnu stopu 4%(pa)d i polugodišnje kapitalisanje. Odrediti uvećani kapital: a) Racionalnim metodom b) Komercijalnim metodom.

Rešenje:

a) $$K_n = K \cdot r^t = 5.000 \cdot 1{,}02^t$$

t je 7 godina i 8 meseci što izraženo u mesecima iznosi 84+8=92 pa je:

$$K_n = K \cdot r^t = 5.000 \cdot 1{,}02^t = 5.000 \cdot 1{,}02^{\frac{92}{6}} = 6773{,}91$$

b) Ceo broj obračunskih perioda je 15 (obzirom da je posle 7 godina preostalo još 8 meseci a tu je sadržan još jedan obračunski period od pola godine) a preostalo vreme je izraženo u mesecima, odnosno, iznosi 2 meseca, pa je:

$$K_n = K \cdot I_{p\%}^n \left(1 + \frac{pm}{1200}\right) = 5.000 \cdot I_{2\%}^{15} \left(1 + \frac{4 \cdot 2}{1200}\right) =$$
$$= 5.000 \cdot 1{,}345868 \cdot 1{,}006667 = 6774{,}20$$

Primer:

Uloženo je K dinara u banku koja plaća 8%(pa)d kamate uz godišnje kapitalisanje. Po kojoj polugodišnjoj stopi bi se dobio isti krajnji kapital ali uz polugodišnje kapitalisanje.

Rešenje:

Potrebno je ustvari odrediti konformnu polugodišnju kamatnu stopu koja odgovara godišnjoj kamatnoj stopi od 8%. Kako je:

$$p_k = 100\left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1\right)$$

u ovom slučaju je $m = 2$; $p = 8$; pa je:

$$p_k = 100\left(\sqrt[2]{1 + \frac{8}{100}} - 1\right) = 3{,}92304\%$$

Primer:

Polugodišnjoj kamatnoj stopi od 9% odrediti konformnu mesečnu stopu.

Rešenje:

U ovom slučaju je $m = 6$; $p = 9$; pa je:

$$p_k = 100\left(\sqrt[6]{1+\frac{9}{100}}-1\right) = 1{,}44666\%$$

Konformna stopa se mogla odrediti i pomoću kamatnih tablica. Kako oba faktora akumulacije (i preko stope 9% za jedan obračunski period i preko $p_k\%$ - nepoznate konformne stope za šest meseci sa mesečnim kapitalisanjem) moraju imati isti efekat to je:

$$I_{9\%}^{1} = I_{p_k\%}^{6}$$

Odavde je:

$$1{,}09 = I_{p_k\%}^{6}$$

a odavde koristeći linearnu interpolaciju, uzimajući vrednosti faktora akumulacije iz tablica koje su najbliže datoj vrednosti faktora akumulacije 1,09 a to su vrednosti iz kamatnih tablica:

$$I_{1\%}^{6} = 1{,}0615 \qquad \text{i} \qquad I_{2\%}^{6} = 1{,}1262$$

pa koristeći formulu za linearnu interpolaciju:

$$\frac{x-x_1}{y-y_1} = \frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$$

dobijamo:

$$\frac{p_k-1}{I_{p_k\%}^{6}-I_{1\%}^{6}} = \frac{2-1}{I_{2\%}^{6}-I_{1\%}^{6}} \Rightarrow p_k - 1 = \frac{1\cdot\left(I_{p_k\%}^{6}-I_{1\%}^{6}\right)}{I_{2\%}^{6}-I_{1\%}^{6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_k - 1 = \frac{0{,}0285}{0{,}0647} \Rightarrow p_k = 1{,}4405\%$$

Linearnu interpolaciju smo mogli jednostavnije predstaviti tabelom:

p%	Tabli~ne vrednosti	p%	Tabli~ne vrednosti
2 1	1,1262 1,0615	p_k 1	1,0900 1,0615
1	0,0647	p_k -1	0,0285

Razmera tabličnih vrednosti je jednaka razmeri kamatnih stopa pa je:

$$0{,}0647 : 0{,}0258 = 1 : (p_k - 1) \;\Rightarrow\; p_k - 1 = \frac{0{,}0258}{0{,}0647} \;\Rightarrow\; p_k = 1{,}4405\%$$

Razlika koja se dobija koristeći linearnu interpolaciju u odnosu na tačno rešenje je manja što je manji interval u kome se nalazi kamatna stopa za koju tražimo faktor akumulacije (što su bliže približne tablične vrednosti koje koristimo tabličnoj vrednosti nepoznate kamatne stope). Razlika potiče usled zamene vrednosti eksponencijalne funkcije sa vrednostima linearne funkcije za iste vrednosti argumenta.

ESKONTNI FAKTOR

Rešavanjem jednačine $K_n = K \cdot r^n$ po K dobija se:

$$K = K_n \cdot r^{-n}$$

r^{-n} - je eskontni faktor i nalazi se u drugim tablicama, u tablicama složenih kamata kao $II^n_{p\%}$ pa je:

$$K = K_n \cdot II^n_{p\%}$$

Prema tome eskontni faktor je recipročna vrednost faktora akumulacije, odnosno, druge tablice su recipročna vrednost prvih tablica složenih kamata (i obrnuto), tj:

$$II^n_{p\%} = \frac{1}{I^n_{p\%}}$$

Ako vreme ukamaćivanja nije ceo broj obračunskih perioda (perioda kapitalisanja) onda se rešavanjem odgovarajućih jednačina po K kod faktora akumulacije dobijaju relacije:

a) Ako je preostalo vreme posle celog broja perioda kapitalisanja izraženo u mesecima:

$$K = \frac{K_n}{I^n_{p\%}\left(1 + \frac{pm}{1200}\right)} = \frac{K_n \cdot II^n_{p\%}}{1 + \frac{pm}{1200}}$$

b) Ako je preostalo vreme posle celog broja perioda kapitalisanja izraženo u danima:

$$K = \frac{K_n}{I^n_{p\%}\left(1 + \frac{pd}{36000}\right)} = \frac{K_n \cdot II^n_{p\%}}{1 + \frac{pd}{36000}}$$

gde je n-ceo broj perioda kapitalisanja.

Primer:

Koliko treba danas uložiti u banku koja plaća 8%(pa)d kamate uz polugodišnje kapitalisanje, da bi se posle 6 godina raspolagalo kapitalom od 40.000 dinara.

Rešenje:

Ovde je $K_n = 40.000$; $n = 12$; $r = 1 + \frac{4}{100}$; pa je:

$$K = K_n \cdot r^{-n} = 40.000 \cdot 1.04^{-12} = 40.000 \cdot 0.624597 = 24983{,}88$$

ili:

$$K = K_n \cdot II_{p\%}^{n} = 40.000 \cdot II_{4\%}^{12} = 40.000 \cdot 0{,}624597 = 24983{,}88$$

Primer:

Koliko treba danas uložiti u banku koja plaća 4%(pa)d kamate i kapitališe polugodišnje da bi se posle 12 godina i 22 dana raspolagalo sa 10.000 din.

Rešenje:

Kako je ovde preostalo vreme posle celog broja obračunskih perioda izraženo u danima to je:

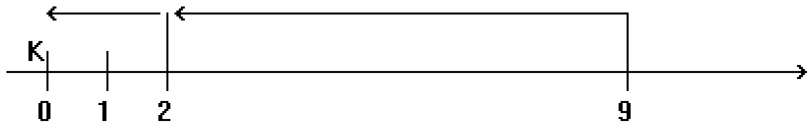
$$K = \frac{K_n}{I_{p\%}^{n}\left(1 + \frac{pd}{36000}\right)} = \frac{K_n \cdot II_{p\%}^{n}}{1 + \frac{pd}{36000}} = \frac{K_n \cdot II_{2\%}^{24}}{1 + \frac{4 \cdot 22}{36000}} =$$

$$= \frac{10.000 \cdot 0{,}621721}{1{,}002444} = 6.202{,}05$$

Primer:

Koliko treba danas uložiti u banku da bi se posle 9 godina raspolagalo sa 80.000 dinara, ako banka računa kamatu 4%(pa)d prve dve godine, a posle toga uz 5%(pa)d i godišnje kapitalisanje.

Rešenje:



$$K = (K_n \cdot II_{5\%}^{7}) \cdot II_{4\%}^{2} = 80.000 \cdot 0{,}710681 \cdot 0{,}9245560 = 52565{,}15$$

Primer:

Odabrati povoljniju ponudu za prodaju neke robe:

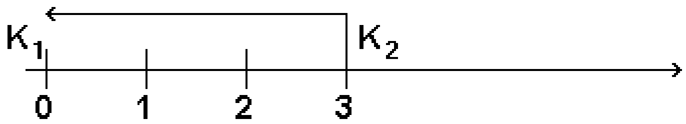
- Prvi kupac nudi 10.000 din. u gotovu i 20.000 din. posle 3 godine.
- Drugi kupac nudi 20.000 din. posle 2 godine i 15.000 din. posle 5 god.

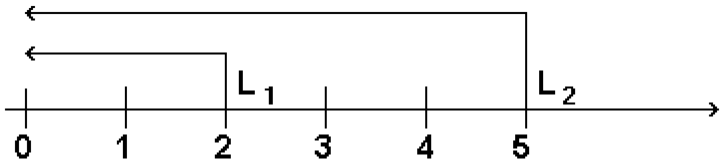
Kamatna stopa je 7%(pa)d i kapitalisanje godišnje.

Rešenje:

Da bi uporedili iznose u različitim vremenskim trenucima moramo ih dovesti na isti rok. Rok na koji dovodimo vrednost ponuda biramo proizvoljno. Uobičajeno je da to bude rok danas ili rok poslednjeg plaćanja.

Svedimo ove dve ponude na rok danas:





Prva ponuda dovedena na rok danas je:

$$K = K_1 + K_2 \cdot II_{7\%}^{3} = 10.000 + 20.000 \cdot II_{7\%}^{3} = 26.325{,}96$$

Druga ponuda dovedena na rok danas je:

$$L = L_1 \cdot II_{7\%}^{2} + L_2 \cdot II_{7\%}^{5} = 20.000 \cdot II_{7\%}^{2} + 15.000 \cdot II_{7\%}^{5} = 28.163{,}57$$

Prema tome za prodaju je povoljnija druga ponuda.

Primer:

Za koje će vreme iznos od 40.000 din. uložen u banku uz kamatnu stopu 6%(pa)d i polugodišnje kapitalisanje da naraste na 60.000 din.

Rešenje:

Ovde je $K_n = 60.000$; $K = 40.000$; $r = 1{,}03$;

Kako je $K_n = K \cdot r^n \quad \Rightarrow \quad 60.000 = 40.000 \cdot 1.03^n$

gde je n-broj polugodišta, pa je dalje:

$$1{,}03^n = \frac{60.000}{40.000} \Rightarrow 1{,}03^n = 1{,}5 \Rightarrow \log 1{,}03^n = \log 1{,}5 \Rightarrow n \cdot \log 1{,}03 = \log 1{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}03} \Rightarrow n = 13{,}7142$$

Dakle imamo 13 polugodišta i ostatak je 0,7142 pa ako hoćemo preostalo vreme da izrazimo u mesecima treba preći u brojni sistem sa osnovom 6 (polugodište ima 6 meseci):

$$0{,}7142 \cdot 6 = 4{,}29$$

Dakle 4 meseca i 0,29 · 30 = 8,7 ≈ 9 dana, pa je ukupno vreme 6 god. 10 meseci i 9 dana.

Moguće je vreme dobiti i pomoću kamatnih tablica:

Kako je:

$$K_n = K \cdot I_{p\%}^n \quad \Rightarrow \quad 60.000 = 40.000 \cdot I_{3\%}^n \quad \Rightarrow \quad I_{3\%}^n = \frac{60.000}{40.000} = 1{,}5$$

Dakle imamo da je $I_{3\%}^n = 1{,}5$. Kako se vrednost 1,5 ne nalazi u kamatnim tablicama (ni za jednu vrednost n-a koja se nalazi u tablicama), to se uzimaju dve najbliže vrednosti (veća i manja) i linearnom interpolacijom se izračunava n. Vrednost 1,5 se nalazi između tabličnih vrednosti $1{,}4685 = I_{3\%}^{13}$ i vrednosti $1{,}5126 = I_{3\%}^{14}$. Koristeći linearnu interpolaciju dobijamo da je n = 13,7143 što iznosi 6 god. 10 meseci i 9 dana.

FAKTOR DODAJNIH ULOGA

Anticipativni ulozi

(ulozi početkom obračunskog perioda)

Ako je S_n suma svih uloga po U dinara, uloženih početkom obračunskih perioda, zajedno sa pripadajućim kamatama, a n broj uloga,tada je:

$$S_n = Ur\frac{r^n - 1}{r-1}\ ; \qquad r\frac{r^n-1}{r-1} \text{ - je faktor dodajnih uloga}$$

ili $\quad S_n = U \cdot III_{p\%}^n\ ;\quad$ gde je $\quad III_{p\%}^n = r\dfrac{r^n-1}{r-1}\ ;$

$III_{p\%}^n$ - su treće kamatne tablice i nalaze se kao treće tablice u tablicama složenih kamata. Treće tablice se mogu izraziti preko prvih tablica:

$$III_{p\%}^n = \frac{100+p}{p}(I_{p\%}^n - 1)$$

Ako su ulozi češći od kapitalisanja i neka je m broj uloga U u obračunskom periodu početkom jednakih vremenskih intervala, tada je:

$$S_{mn} = U_1(1 + III_{p\%}^{n-1}) \;; \qquad \text{gde je} \qquad U_1 = U\left(m + \frac{p(m+1)}{200}\right).$$

Može se koristiti i konformna kamatna stopa koju prethodno treba izračunati, pa je:

$$S_{mn} = U \cdot III_{p_k\%}^{mn}$$

gde je $p_k\%$ konformna kamatna stopa koja odgovara vremenskom intervalu ulaganja u odnosu na vremenski interval kapitalisanja.

DEKURZIVNI ULOZI

(ulozi krajem obračunskog perioda)

Ako je S_n' suma svih uloga po U dinara, uloženih krajem obračunskih perioda, zajedno sa pripadajućim kamatama, a n broj uloga, tada je:

$$S_n' = U\frac{r^n - 1}{r - 1} \;; \qquad \text{odnosno} \qquad S_n' = U \cdot (1 + III_{p\%}^{n-1}) \;;$$

Ako su ulozi češći od kapitalisanja i neka je m broj uloga U u obračunskom periodu krajem jednakih vremenskih intervala, tada je:

$$S_{mn} = U_1(1 + III_{p\%}^{n-1}) \;; \qquad \text{gde je} \quad U_1 = U\left(m + \frac{p(m-1)}{200}\right) \;;$$

ili pomoću konformne stope:

$$S_{mn} = U \cdot (1 + III_{p_k\%}^{mn-1})$$

gde je $p_k\%$ konformna kamatna stopa koja odgovara vremenskom intervalu ulaganja u odnosu na vremenski interval kapitalisanja.

Primer:

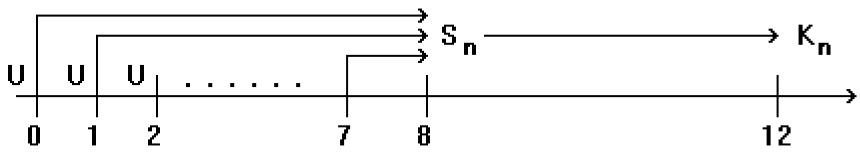
Početkom svakog polugodišta, u narednih 8 godina, ulaže se u banku po 2.000 din. uz kamatnu stopu 6%(pa)d i polugodišnje kapitalisanje. Odrediti sumu uloga: a) Posle 8 godina. b) Posle 12 godina.

Rešenje:

a) U pitanju su anticipativni ulozi pa je:

$$S_n = U \cdot III_{p\%}^{n} = 2.000 \cdot III_{3\%}^{16} = 2.000 \cdot 20{,}76159 = 41523{,}18$$

b) Za period od 8 do 12 godine nije bilo ulaganja pa je suma uloga S_n na kraju 8 godine početni kapital za naredno vreme od 4 godine (bez novih ulaganja) i treba ga uvećati faktorom akumulacije (pomnožiti faktorom prvih tablica).



$$K_n = S_n \cdot I_{3\%}^{8} = (U \cdot III_{3\%}^{16}) \cdot I_{3\%}^{8} = 41.523{,}18 \cdot 1{,}266770 = 52.600{,}32$$

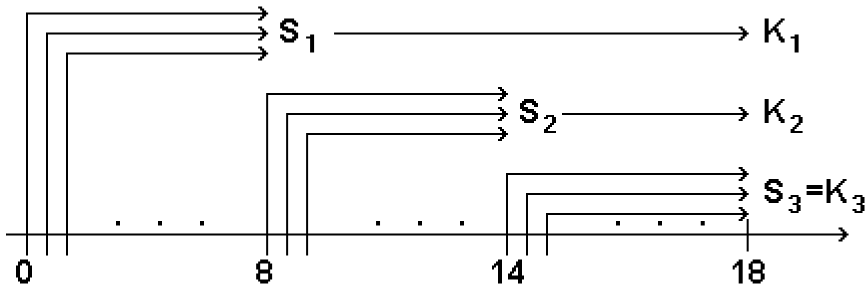
Uvećani kapital posle 12 godina je 52.600,32 din.

Primer:

Ulagano je u banku početkom svake godine: prvih 8 godina po 1.000 dinara, sledećih 6 godina po 2.000 dinara i naredne 4 godine po 3.000 din. Kamatna stopa je 8%(pa)d a kapitalisanje godišnje. Odrediti: a) Sumu uloga na kraju 18 godine. b) Sadašnju (aktuelnu) vrednost sume uloga.

Rešenje:

a) Izračunajmo slično kao u primeru 1. vrednost svake pojedinačne sume ove tri grupe uloga na kraju 18 godine:



Vrednost prve grupe uloga S_1 na kraju osme godine je:

$$S_1 = U \cdot III_{p\%}^{n} = 1.000 \cdot III_{8\%}^{8} = 1.000 \cdot 11{,}48756 = 11487{,}56$$

A vrednost te grupe uloga na kraju 18 godine je:

$$K_1 = S_1 \cdot I_{8\%}^{10} = 11487{,}56 \cdot 2{,}158925 = 24.800{,}78$$

Vrednost druge grupe uloga (od 8 do 14 godine) na kraju 14 godine je:

$$S_2 = 2.000 \cdot III_{8\%}^{6} = 2.000 \cdot 7{,}92280 = 15.845{,}60$$

A vrednost te grupe uloga na kraju 18 godine je:

$$K_2 = S_2 \cdot I_{8\%}^{4} = 15.845{,}60 \cdot 1{,}360489 = 21.557{,}76$$

Vrednost treće grupe uloga (od 14 do 18 godine) je:

$$S_3 = 3.000 \cdot III_{8\%}^{4} = 14.559{,}80$$

a kako za S_3 nema vremena ukamaćivanja prvim tablicama, jer je ta suma uloga na kraju 18 godine, onda je $S_3 = K_3$. Vrednost ukupne sume uloga na kraju 18 godine je sada zbir vrednosti svih pojedinačnih suma grupa uloga dovedenih na rok kraja 18 godine.

$$K_n = K_1 + K_2 + K_3 = 60.957{,}74$$

b) Sadašnja vrednost K_0 sume uloga K_n se dobija kada se ukupna suma uloga K_n na kraju 18 godine diskontuje za vreme od 18 godina, odnosno izračunavamo njenu sadašnju (aktuelnu) vrednost, dakle, množimo eskontnim faktorom (drugim tablicama).

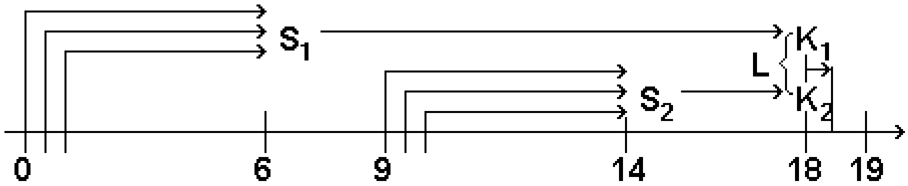
$$K_0 = K_n \cdot II_{8\%}^{18} = 60.957{,}74 \cdot II_{8\%}^{18} = 15.254{,}61$$

Primer:

Ulagano je u banku prvih 6 godina početkom svake godine po 4.000 dinara. Posle pauze od 3 godine ulaganje je nastavljeno još 5 godina. Izračunati sumu uloga posle 18 godina i 3 meseca računajući od danas. Kamatna stopa je 6%(pa)d a kapitalisanje godišnje.

Rešenje:

Potrebno je ulaganje podeliti na dve grupe uloga obzirom na prekid u toku ulaganja.



Izračunajmo sumu prve grupe uloga (K_1) i druge grupe uloga (K_2) na kraju 18 godine (L):

$$K_1 = S_1 \cdot I_{6\%}^{12} = 4.000 \cdot III_{6\%}^{6} \cdot I_{6\%}^{12} = 59.511{,}41$$

$$K_2 = S_2 \cdot I_{6\%}^{4} = 4.000 \cdot III_{6\%}^{5} \cdot I_{6\%}^{4} = 30.174{,}81$$

$$L = K_1 + K_2 = 89.686{,}22$$

Sada je potrebno dodati kapitalu L prostu kamatu koju on stvara za 3 meseca pa je:

$$L+i=L+\frac{L\cdot p\cdot m}{1200}=L\left(1+\frac{pm}{1200}\right)=89.686{,}22\cdot\left(1+\frac{6\cdot 3}{1200}\right)=91.031{,}51$$

Dakle, vrednost kapitala posle 18 god. i 3 meseca je 91.031,51 din.

Primer:

Uplaćeno je u banku 90.000 din. Počev od danas početkom svakog semestra podiže se sa računa po 5.000 din. u narednih 10 godina. Odrediti stanje na računu na kraju 16 godine od danas. Kamatna stopa je 4%(pa)d a kapitalisanje polugodišnje.

Rešenje:

Kapital od $S=90.000$ din. uložen danas uveća se kamatom na kamatu za 16 godina na S_n dinara gde je:

$$S_n=S\cdot I_{2\%}^{32}=90.000\cdot I_{2\%}^{32}=169.608{,}69$$

a od tog iznosa treba oduzeti uvećanu vrednost sume jednakih uloga dovedene na isti rok:

$$P_n=U\cdot III_{2\%}^{20}\cdot I_{2\%}^{12}=5.000\cdot III_{2\%}^{20}\cdot I_{2\%}^{12}=157.156{,}22$$

Sada su obe sume dovedene na rok posle 16 godina pa njihovim oduzimanjem dobijamo konačno stanje na računu u tom trenutku:

$$K_n=S_n-P_n=12.452{,}47$$

Moguće je bilo postupiti i na drugi način: Odrediti razliku uvećanog uloženog kapitala i sume podizanih uloga takođe uvećane i obe vrednosti dovedene na rok prestanka daljeg podizanja uloga, pa tu razliku ukamatiti za naredni period od 6 godina kada nije bilo daljeg podizanja uloga. Zato je to početni kapital za taj period i treba ga pomnožiti faktorom akumulacije (prvim tablicama). U tom slučaju je:

$$S_n=90.000\cdot I_{2\%}^{20}=133.735{,}23$$

S_n - je vrednost kapitala od 90.000 din. posle 10 godina.

$$P_n=5.000\cdot III_{2\%}^{20}=123.916{,}59$$

P_n - je suma podizanih uloga na kraju 10-te godine.

$$K=S_n-P_n=9.818{,}65$$

K - je stanje na računu na kraju 10-te godine.

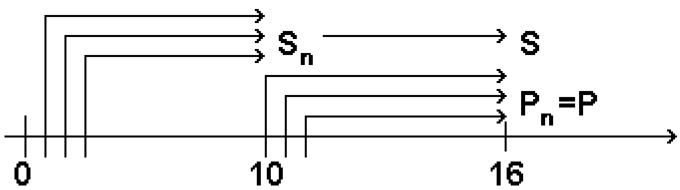
$$K_n=K\cdot I_{2\%}^{12}=12.452{,}42$$

K_n - je stanje na računu posle 16 godina.

Primer:

Po koliko dinara treba krajem svake godine uplatiti u banku u toku prvih 10 godina da bi se od desete godine početkom svake godine moglo podizati po 5.000 dinara u toku sledećih 6 godina. Kamatna stopa je 5%(pa)d a kapitalisanje godišnje.

Rešenje:



Izračunajmo prvo sumu dekurzivnih uloga (koji se ulažu prvih 10 godina) na kraju 16 godine:

$$S = S_n \cdot I_{5\%}^{6} = U \cdot (1 + III_{5\%}^{10-1}) \cdot I_{5\%}^{6} = U \cdot (1 + III_{5\%}^{9}) \cdot I_{5\%}^{6}$$

Ovaj kapital (S) treba da bude jednak ukupnoj sumi uloga koji su podizani dovedeni na isti rok (kraj 16-te godine).

$$P_n = 5.000 \cdot III_{5\%}^{6}$$

P_n je suma podizanih uloga od 10-te do 16-te godine. Dakle, $P_n = P$. Sume S i P treba da budu jednake pa je $S = P$ odnosno:

$$U \cdot (1 + III_{5\%}^{9}) \cdot I_{5\%}^{6} = 5.000 \cdot III_{5\%}^{6}$$

a odavde sledi:

$$U = \frac{5.000 \cdot III_{5\%}^{6}}{(1 + III_{5\%}^{9}) \cdot I_{5\%}^{6}} = \frac{5.000 \cdot III_{5\%}^{6} \cdot II_{5\%}^{6}}{1 + III_{5\%}^{9}} = 2.118,59$$

Znači da je traženi ulog U = 2.118,59 din.

Primer:

Danas je uplaćena u banku izvesna suma novca. Na osnovu toga je u narednih 8 godina krajem svake godine podizano po 3.000 dinara i kroz 12 godina na računu je ostalo 40.000 dinara. Odrediti uplaćenu sumu ako banka računa kamatu po stopi 8%(pa)d i kapitališe godišnje.

Rešenje:

Kapital od K dinara uvećaće se kroz 12 godina na iznos K_n dinara gde je:

$$K_n = K \cdot I_{8\%}^{12}$$

a ukupna suma podizanih uloga na kraju 12-te godine je:

$$S_n = S \cdot I_{8\%}^{4}$$

gde je S suma dekurzivnih uloga na kraju 8 godine, odnosno:

$$S = U \cdot (1 + III_{8\%}^{8-1})$$

pa je:

$$S_n = S \cdot I_{8\%}^{4} = U \cdot (1 + III_{8\%}^{8-1}) \cdot I_{8\%}^{4} = 3.000 \cdot (1 + III_{8\%}^{7}) \cdot I_{8\%}^{4} = 43.413{,}1$$

i dalje:

$$K_n - S_n = 40.000; \quad \text{odnosno} \quad K \cdot I_{8\%}^{12} - S_n = 40.000;$$

odakle se dobija:

$$K \cdot 2{,}518170 - 43.413{,}05 = 40.000 \quad \Rightarrow \quad K = 33.124{,}47$$

Primer:

Koja je ponuda povoljnija za prodavca:

- Prvi kupac nudi 2.000 din. posle 4 godine i 2.000 posle 8 godina i 3 meseca.
- Drugi kupac nudi krajem svake godine u narednih 8 godina po 500 dinara.

Kamatna stopa je 4%(pa)d a kapitalisanje godišnje.

Rešenje:

Svedimo obe ponude na isti rok (rok danas).

- Prva ponuda:

$$S_0 = 2.000 \cdot II_{4\%}^{4} + \frac{2.000 \cdot II_{4\%}^{4}}{1 + \frac{4 \cdot 3}{1200}} = 1.709{,}61 + 1.446{,}91 = 3.156{,}52$$

- Druga ponuda:

$$K_n = 500 \cdot (1 + III_{4\%}^{8-1}); \quad \text{a današnja vrednost sume } K_n \text{ je:}$$

$$K_0 = K_n \cdot II_{4\%}^{8} = 500 \cdot (1 + III_{4\%}^{7}) \cdot II_{4\%}^{8} = 3.366{,}37$$

Dakle za prodavca je povoljnija druga ponuda.

Primer:

Početkom svake godine ulaže se po 6.000 dinara uz kamatnu stopu 4%(pa)d i godišnje kapitalisanje. Na kraju godine u kojoj je uložen poslednji ulog treba da se raspolaže sa 90.000 dinara. Odrediti vrednost poslednjeg uloga ako on nije 6.000 dinara.

Rešenje:

Ovde imamo da je: $S_n = 90.000$; $U = 6.000$; $p = 4\%$;

Iz formule za sumu anticipativnih uloga imamo:

$$S_n = U \cdot III_{p\%}^n \quad \Rightarrow \quad 90.000 = 6.000 \cdot III_{4\%}^n \quad \Rightarrow \quad III_{4\%}^n = \frac{90.000}{6.000} = 15$$

Kako se ova vrednost ne nalazi u trećim kamatnim tablicama ni za jednu vrednost n to znači da ova vrednost ne odgovara celom broju n, a n je broj ulaganja (i broj obračunskih perioda) i to je ceo broj imamo da je:

Za $n = 11$: $III_{4\%}^{11} = 14{,}0258$; Za $n = 12$: $III_{4\%}^{12} = 15{,}6268$;

Odnosno da bi imali na kraju 12-te godine tačno 90.000 dinara na računu potrebno je 11 godina početkom svake godine ulagati po 6.000 dinara a na početku 12-te godine uložiti ulog U_1 koji će biti manji od 6.000 dinara. Ako bi i taj 12-ti ulog bio 6.000 dinara onda bi s obzirom na vrednost trećih kamatnih tablica za 15 obračunskih perioda ukupna suma na kraju 15-te godine bila veća od 90.000 dinara. Ako bi se zadržali na 11 uloga po 6.000 dinara onda bi na kraju 11-te godine imali sumu manju od 90.000 dinara.

Kako je vrednost ukupne sume na kraju n-te godine:

$$S_n = U \cdot I_{p\%}^n + U \cdot I_{p\%}^{n-1} + \quad \ldots \quad + U \cdot I_{p\%}^2 + U_1 \cdot I_{p\%}^1$$

to je:

$$S_n = U \cdot r^n + U \cdot r^{n-1} + \quad \ldots \quad + U \cdot r^2 + U_1 \cdot r$$

Ako prethodnu jednačinu podelimo sa r dobijamo:

$$\frac{S_n}{r} = U \cdot r^{n-1} + U \cdot r^{n-2} + \quad \ldots \quad + U \cdot r + U_1$$

odnosno:

$$S_n \cdot r^{-1} = U \cdot (r^{n-1} + r^{n-2} + \quad \ldots \quad + r) + U_1$$

tj. izraženo pomoću kamatnih tablica:

$$S_n \cdot II_{p\%}^1 = U \cdot (I_{p\%}^{n-1} + I_{p\%}^{n-2} + \quad \ldots \quad + I_{p\%}^1) + U_1$$

ili

$$S_n \cdot II_{p\%}^1 = U \cdot III_{p\%}^{n-1} + U_1$$

i konačno dobijamo:

$$U_1 = S_n \cdot II_{p\%}^1 - U \cdot III_{p\%}^{n-1}$$

pa konkretno za ovaj zadatak imamo:

$$U_1 = 90.000 \cdot II_{4\%}^1 - 6.000 \cdot III_{4\%}^{12-1} =$$

$$= 90.000 \cdot 0{,}961538 - 6.000 \cdot 14{,}025805 = 2.383{,}59$$

Primer:

Ulagano je početkom svakog polugodišta u narednih 8 godina po 1.000 dinara u banku koja plaća 6%(pa)d kamate i kapitališe godišnje. Izračunati sumu uloga na kraju 15-te godine.

Rešenje:

Ovde je ulaganje češće od kapitalisanja pa je $m = 2$; $p = 6\%$;

$$U_1 = U\left(m + \frac{p(m+1)}{200}\right) = 1.000\left(2 + \frac{6(2+1)}{200}\right) = 1.000 \cdot 2{,}09 = 2.090$$

a dalje je:

$$S_{mn} = U_1(1 + III_{p\%}^{n-1}) = 2.090\,(1 + III_{6\%}^{8-1}) = 20.685{,}71$$

S_{mn} je suma uloga na kraju 8 godine pa treba taj kapital uvećati faktorom akumulacije za naredni period od 7 godina. Tako je:

$$S = S_{mn} \cdot I_{6\%}^{7} = 20.685{,}71 \cdot I_{6\%}^{7} = 31.103{,}65$$

Zadatak smo mogli rešiti i koristeći konformnu stopu. Prvo treba odrediti polugodišnju konformnu kamatnu stopu datoj godišnjoj stopi od 6%(pa)d, a to je: $p_k = 2{,}9563\%$, pa je:

$$S_{mn} = U \cdot III_{p\%}^{mn} = 1.000 \cdot III_{2{,}9563\%}^{16} = 20.685{,}1$$

gde je faktor dodajnih uloga $III_{2{,}9563\%}^{16}$ određen interpolacijom iz kamatnih tablica pomoću približnih vrednosti faktora dodajnih uloga $III_{2\%}^{16}$ i $III_{3\%}^{16}$:

Neka je $III_{2{,}9563\%}^{16} = x$. Dalje je:

p	Tabl. vred. za 16 per.	p	Tabl. vred. za 16 per.
3 2	20,7616 19,0121	2,9563 2	x 19,0121
1	1,7495	0,9563	x-19,0121

pa dobijamo:

$1 : 0{,}9563 = 1{,}7495 : (x - 19{,}0121) \Rightarrow x - 19{,}0121 = 1{,}6730 \Rightarrow x = 20{,}6851$

odnosno:

$$x = III_{2{,}9563\%}^{16} = 20{,}6851$$

Moguće je bilo obzirom da je:

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{2{,}9563}{100} = 1{,}029563$$

koristiti i relaciju:

$$S_{mn}=U\cdot r\frac{r^{mn}-1}{r-1}=1.000\cdot 1{,}029563\frac{1{,}029563^{16}-1}{0{,}029563}=20.681{,}39$$

Sada kapital S_{mn} treba uvećati faktorom akumulacije za naredni period od 7 godina, odnosno:

$$S=S_{mn}\cdot I_{6\%}^{7}=20.685{,}1\cdot I_{6\%}^{7}=31.102{,}74$$

FAKTOR AKTUELIZACIJE

Sadašnja vrednost niza jednakih dekurzivnih uloga od U dinara je:

$S_0=U\dfrac{r^n-1}{r^n(r-1)}$; gde je $\dfrac{r^n-1}{r^n(r-1)}$ - faktor aktuelizacije

ili $S_0=U\cdot IV_{p\%}^{n}$; gde je $IV_{p\%}^{n}=\dfrac{r^n-1}{r^n(r-1)}$;

$IV_{p\%}^{n}$ - su četvrte kamatne tablice i nalaze se kao četvrte tablice u tablicama složenih kamata. Četvrte tablice se mogu izraziti preko drugih tablica:

$$IV_{p\%}^{n}=\frac{100}{p}(1-II_{p\%}^{n})$$

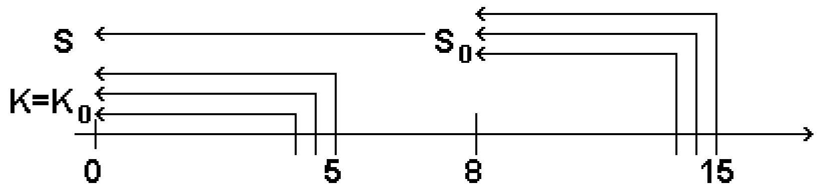
Sadašnja vrednost niza jednakih anticipativnih uloga od U dinara je:

$S_0'=U\dfrac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)}$; odnosno $S_0'=U\cdot(1+IV_{p\%}^{n-1})$.

Primer:

Ulagano je u banku krajem svake godine po 3.000 dinara u narednih 5 godina. Posle pauze od 3 godine tokom kojih nije bilo ulaganja, nastavljeno je sa ulaganjem još 7 godina. Odrediti sadašnju vrednost ukupnog kapitala. Kamatna stopa je 3%(pa)d a kapitalisanje godišnje.

Rešenje:



S_0 je vrednost niza dekurzivnih uloga od 8 do 15-te godine dovedenih na početak devete (kraj osme) godine pa je:

$$S_0 = U \cdot IV_{p\%}^{n} = 3.000 \cdot IV_{3\%}^{7} = 3.000 \cdot 6{,}230283 = 18.690{,}85$$

Sada je potrebno kapital od S_0 dinara pomnožiti eskontnim faktorom (drugim tablicama) da bi odredili sadašnju vrednost kapitala S_0:

$$S = S_0 \cdot II_{3\%}^{8} = 18.690{,}85 \cdot II_{3\%}^{8} = 14.754{,}73$$

Sadašnja vrednost niza dekurzivnih uloga koji se ulažu u prvih 5 godina je K_0, a kako je to sadašnji trenutak nije potrebno dalje diskontovati dobijenu vrednost, pa je $K_0 = K$:

$$K = K_0 = U \cdot IV_{p\%}^{n} = 3.000 \cdot IV_{3\%}^{5} = 13.739{,}12$$

Sadašnja vrednost ukupnog kapitala (C) je $C = S + K$ odnosno:

$$C = S + K = 14.754{,}73 + 13.739{,}12 = 28.493{,}85$$

Zadatak smo mogli rešiti i na drugi način. Prvo izračunajmo vrednost ukupnog kapitala na kraju 15-te godine a zatim taj ukupan kapital diskontujemo za 15 godina i dobićemo današnju vrednost ukupnog kapitala.

Vrednost prve grupe uloga na kraju 15-te godine je:

$$K_1 = 3.000 \cdot (1 + III_{3\%}^{5-1}) \cdot I_{3\%}^{10} = 3.000 \cdot 5{,}309136 \cdot 1{,}343916 = 21.405{,}0984$$

Vrednost druge grupe uloga na kraju 15-te godine je:

$$K_2 = 3.000 \cdot (1 + III_{3\%}^{7-1}) = 3.000 \cdot 7{,}662462 = 22.987{,}386$$

Sada je dakle vrednost ukupnog kapitala na kraju 15-te godine:

$$K = K_1 + K_2 = 21.405{,}0984 + 22.987{,}386 = 44.392{,}4844$$

a vrednost ovog kapitala pre 15 godina je:

$$C = K \cdot II_{3\%}^{15} = 44.392{,}4844 \cdot 0{,}641862 = 28.493{,}8488$$

ZADACI:

1. Pre 6 godina uloženo je 35.000 dinara, a danas je podignuto 40.000 dinara. Kojom se sumom raspolaže posle 5 godina od danas ako je kamatna stopa 8%(pa)d a kapitalisanje kvartalno.

2. Koliko vremena treba da bude ukamaćen iznos od 5.000 dinara da bi doneo 3.000 dinara kamate, ako je kamatna stopa 7%(pa)d uz godišnje kapitalisanje.

3. Uloženo je u banku 10.000 dinara. Kamatna stopa prve dve godine je 3%(pa)d, sledeće tri godine 4%(pa)d, a naredne dve godine 6%(pa)d uz godišnje kapitalisanje. Kojom stalnom kamatnom stopom koja bi važila svih sedam godina uz godišnje kapitalisanje bi se dobio isti krajnji kapital.

4. Dva kapitala čiji je zbir 10.000 dinara uloženi su: Jedan uz prost interes po stopi 5%. Drugi uz složeni interes po stopi 4%(pa)d i godišnje kapitalisanje. Odrediti kapitale ako su oni posle 20 godina dostigli jednaku vrednost.

5. Pre 8 godina uloženo je u banku 10.000 dinara. Koliko je danas potrebno još uložiti da bi se na osnovu ukupne sume moglo primati početkom svake godine u narednih 5 godina po 4.000 dinara. Kamatna stopa je 3%(pa)d i godišnje kapitalisanje.

6. Ulagano je krajem svake godine po 9.000 dinara u narednih 8 godina. Posle pauze od 4 godine tokom kojih nije bilo ulaganja, sa istog računa podizano je krajem svake godine u narednih 5 godina po K dinara, čime se imovina na računu ugasila. Kamatna stopa je 5%(pa)d i godišnje kapitalisanje. Odrediti K.

7. Uplaćivano je u banku krajem svake godine: Prvih 6 godina po 1.000 dinara, naredne 3 godine po 5.000 dinara i sledećih 7 godina po 8.000 dinara. Izračunati stalan ulog koji bi trebalo ulagati krajem svake godine u toku svih 16 godina da bi se na kraju 16-te godine raspolagalo istom sumom novca. Kamatna stopa je 4%(pa)d i godišnje kapitalisanje.

8. Uloženo je u banku 80.000 dinara. Na osnovu toga počev od četvrte godine podizaće se početkom svakog polugodišta po 2.000 dinara u narednih 7 godina. Koliko je stanje na računu kroz 16 godina i 2 meseca počev od danas ako je kamatna stopa 2%(pa)d a kapitalisanje godišnje.

9. Osam godina ulagano je krajem godine u banku po 2.000 dinara uz kamatnu stopu prve tri godine 4%(pa)d, a posle toga uz 6%(pa)d i godišnje kapitalisanje. Odrediti sumu uloga na kraju 12-te godine.

10. Krajem svakog kvartala ulagano je u banku po 8.000 dinara. Kamatna stopa je 8%(pa)d a kapitalisanje godišnje. Odrediti sumu uloga na kraju desete godine.

Rešenja zadataka:

1. 24.211,25 din. 2. 6.god 11.m 8. d; 3. 4,27%;
4. K_1=4.772 din. K_2=5.228 din; 5. 10.917,80 din; 6. 24.128 din;
7. 13.818,29 din. 8. 75.815,67 din. 9. 24.677,83 din; 10. 477.478,34 din;